

Τμήμα Φυσικής
Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών
Υπολογιστικές Μέθοδοι Φυσικής

*Ανακατασκευή τροχιών φορτισμένων
σωματιδίων σε δύο διαστάσεις σε
ομογενές μαγνητικό πεδίο.*

Ευστάθιος Κ. Στεφανίδης

Τομέας Πυρηνικής Φυσικής και
Φυσικής Στοιχειωδών Σωματιδίων.

Στην παρούσα εργασία γίνεται μελέτη της δυνατότητας ανακατασκευής (reconstruction) επίπεδων τροχιών φορτισμένων σωματιδίων μέσα σε κάθετο ομογενές μαγνητικό πεδίο. Η μελέτη γίνεται με Monte Carlo παραγωγή των τροχιών, ενώ μελετάται η επίδραση διαφόρων παραμέτρων στη δυνατότητα της ανακατασκευής. Υπολογίζονται τα υπόλοιπα (residuals) δύο ανιχνευτών, ενώ προσεγγίζονται οι παράμετροι σε μια πραγματική κατάσταση.

A. Εισαγωγή.

Το πρόβλημα που αντιμετωπίζουμε είναι η δυνατότητα να ανακατασκευάσουμε την τροχιά φορτισμένου σωματιδίου, το οποίο γεννάται με τυχαία ορμή και υπό τυχαία γωνία. Για απλοποίηση, θεωρούμε την κίνηση σε δύο διαστάσεις και με ομογενές κάθετο μαγνητικό πεδίο. Ως επίπεδο κίνησης θεωρείται ένα τεταρτημόριο, στο οποίο έχουν τοποθετηθεί δέκα ισαπέχοντα τεταρτοκύκλια ανιχνευτών. Είναι προφανές ότι οι παραπάνω απλοποιήσεις δεν περιορίζουν τη γενικότητα και ότι παρόμοιες αναλύσεις μπορούν να εφαρμοστούν σε γενικότερες εφαρμογές.

B. Κώδικας.

Ο κύριος κώδικας που χρησιμοποιήθηκε για την παραγωγή των δεδομένων (row data) και την παρουσίαση των τροχιών είναι ο "Pattern_Reco.c" και παρουσιάζεται στο Παράρτημα Α που ακολουθεί στο τέλος. Όπως όλοι οι χρησιμοποιηθέντες κώδικες, έτσι και αυτός είναι γραμμένος για το πακέτο ανάλυσης της ROOT (ver. 3.01/06) και σε C++ OO γλώσσα προγραμματισμού.

Γ. Περιγραφή.

Αρχικά, οι παράμετροι που απαιτούνται είναι η τιμή του μαγνητικού πεδίου (kBeta), του φορτίου (kCharge) και της μάζας(kMass) του σωματιδίου. Χάρην απλότητας στου υπολογισμούς, θεωρούμε κατάλληλο σύστημα μονάδων, ώστε η μάζα και το φορτίο του σωματιδίου να είναι μονάδα, ενώ παράλληλα, επιλέγουμε το μοναδιαίο μαγνητικό πεδίο (σε αυθαίρετες μονάδες).

Πρώτα κατασκευάζεται το σύστημα συντεταγμένων του πρώτου τεταρτημορίου και σχεδιάζονται οι δέκα τεταρτοκύκλιοι ανιχνευτές. Οι διαστάσεις του τεταρτοκυκλίου είναι 10x10 μονάδες μήκους και οι ανιχνευτές απέχουν 1 μονάδα μήκους ο ένας από τον άλλον. Ενδιαφερόμαστε μόνο για το τμήμα αυτό του επιπέδου, οπότε σχεδιάζονται μόνο οι τροχιές και οι ανιχνευτές που ανήκουν σε αυτό.

Στη συνέχεια, με επαναληπτική διαδικασία, παράγονται σωματίδια με τυχαία γωνία και ορμή. Ο αριθμός των παραγόμενων σωματιδίων είναι αυθαίρετος. Αυτό όμως που μας ενδιαφέρει είναι κάθε φορά να καταγράψουμε 1000 τροχιές-σωματίδια, στα οποία συγκλίνει η προσαρμογή των τροχιών.

Η τυχαία παραγωγή γωνίας δίνει γωνίες από 0 rad έως $\frac{\pi}{2}$ rad και αυτό γίνεται από την αρχική παραγωγή τυχαίων δεκαδικών αριθμών στο διάστημα [0,1] από τον

γεννήτορα τυχαίων αριθμών που προσφέρει η ROOT. Στο Παράρτημα Β γίνεται αναφορά στον συγκεκριμένο γεννήτορα και στον έλεγχο της «ποιότητας» των τυχαίων αριθμών που αυτός δίνει.

Με δεδομένη την ακτίνα καμπυλότητας (από την αρχική ορμή) και της εφαπτόμενης της τροχιάς στο σημείο παραγωγής (από την αρχική γωνία) υπολογίζεται η εξίσωση της πραγματικής τροχιάς που θα ακολουθήσει το φορτισμένο σωματίδιο υπό την επίδραση της δύναμης Lorentz. Οι συντεταγμένες των σημείων στους ανιχνευτές υπολογίζονται από την επίλυση του συστήματος των εξισώσεων της τροχιάς και των ανιχνευτών. Στο Παράρτημα Γ δίδονται αναλυτικά οι αντίστοιχες μαθηματικές εξισώσεις.

Το επόμενο βήμα είναι να πάρουμε τα **πραγματικά** σήματα που δίνουν οι ανιχνευτές. Θεωρούμε λοιπόν ότι όλοι οι ανιχνευτές μας έχουν την ίδια διακριτική ικανότητα 0.01 στην πολική γωνία φ . Υπό αυτήν την έννοια μετακινούμε κάθε σήμα του ανιχνευτή κατά μία τυχαία γωνία πάνω σε αυτόν (με την ακτίνα να παραμένει σταθερή), η οποία προκύπτει με την παραγωγή ενός τυχαίου αριθμού από μια Γκαουσιανή κατανομή κεντραρισμένη στο μηδέν και με $\sigma=0.01$. Έτσι υπολογίζουμε για κάθε τροχιά και για κάθε ανιχνευτή τις πολικές συντεταγμένες των πραγματικών σημάτων που δίνουν οι ανιχνευτές. Είναι φανερό πως έτσι φεύγουμε από την ιδανική τροχιά του σωματιδίου και, λαμβάνοντας υπόψιν τη διακριτική ικανότητα των ανιχνευτικών μας διατάξεων, καλούμαστε να ανακατασκευάσουμε την πραγματική ορμή και γωνία των παραγόμενων σωματιδίων.

Έτσι, φτάνουμε στην προσαρμογή των σημείων αυτών. Η προσαρμογή των σημείων οφείλει να μας δώσει έναν κύκλο, από τον οποίο παίρνουμε την ακτίνα καμπυλότητας και την εφαπτομένη στην αρχή των αξόνων, τα οποία με τη σειρά τους μας δίνουν την ανακατασκευασμένη πλέον ορμή και γωνία. Η προσαρμογή γίνεται χρησιμοποιώντας το πρόγραμμα ελαχιστικοποίησης MINUIT και η μέθοδος είναι αυτή της ελαχιστικοποίησης του χ^2 . Οι βασικές παράμετροι που χρησιμοποιήθηκαν είναι οι αρχικές τιμές των μεταβλητών ελαχιστικοποίησης, η ποσότητα βηματισμού καθώς και ο μέγιστος αριθμός των προσπαθειών που θα γίνουν για να βρεθούν οι τιμές των μεταβλητών ελαχιστικοποίησης.

Οι **αρχικές τιμές** αποτελούν την **πρόβλεψη** για τις τιμές των μεταβλητών ελαχιστικοποίησης. Στη συγκεκριμένη εφαρμογή χρησιμοποιήσαμε ως αρχικές τιμές για την προσαρμογή των «διαταραγμένων» σημείων την πραγματική ακτίνα καμπυλότητας και την πραγματική κλίση της γωνίας εκτόξευσης. Αυτό έγινε προκειμένου να μην έχουμε αποτυχίες του MINUIT στη σύγκλιση.¹

Η **ποσότητα βηματισμού** δηλώνει το βήμα με το οποίο θα γίνεται η αρχική επιλογή των τιμών των μεταβλητών ελαχιστικοποίησης. Ο βηματισμός ήταν ανά 0.1 μονάδες, ενώ ο **μέγιστος αριθμός** των προσπαθειών καθορίστηκε στις 500.

¹ Αυτό βέβαια δεν σημαίνει ότι σε όλα τα γεγονότα που τρέξαμε είχαμε σύγκλιση. Υπήρχαν φορές που δεν είχαμε σύγκλιση του MINUIT, λόγω αδυναμίας προσδιορισμού του πίνακα σφάλματος.

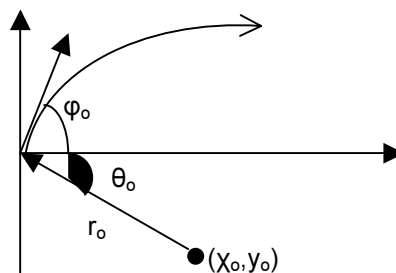
Η συνάρτηση, η οποία χρησιμοποιήθηκε για την ελαχιστικοποίηση του χ^2 είναι η :

$$\varphi = \varphi_0 + \cos^{-1}\left(\frac{r}{2r_0}\right)^2 \quad (1)$$

όπου r, φ είναι οι πολικές συντεταγμένες των «διαταραγμένων» σημείων που χρησιμοποιήθηκαν, ενώ r_0, φ_0 είναι οι δύο παράμετροι, των οποίων οι τιμές ελαχιστοποιούν το χ^2 .

Είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι το MINUIT θα δώσει τις πολικές συντεταγμένες του κέντρου της κυκλικής τροχιάς r_0, θ_0 όπως παρουσιάζεται στο σχήμα 1. Τότε, η γωνία εκτόξευσης, η οποία είναι που μας ενδιαφέρει, θα δοθεί από την εξίσωση:

$$\phi_0 = \frac{\pi}{2} - \text{abs}(\theta_0) \quad (\phi_0, \theta_0 \rightarrow \text{rads}) \quad (2)$$



Σχήμα 1 : Η καμπύλωση της τροχιάς και οι παράμετροι σε πολικές συντεταγμένες.

Για τη συνάρτηση που συνδέει τις δύο παραμέτρους απαιτείται και ο προσδιορισμός του σφάλματος στην ποσότητα φ (στον κώδικα: `errphi`). Όπως θα συζητηθεί στη συνέχεια, το σφάλμα αυτό είναι και η ένδειξη για το σφάλμα (διακριτική ικανότητα) των ανιχνευτικών μας διατάξεων.

Τέλος θα πρέπει να σημειώσουμε ότι, για έχουμε ελαχιστικοποίηση του χ^2 χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση (1), είναι φανερό ότι χρειαζόμαστε τουλάχιστον δύο σημεία, αφού έχουμε δύο ελεύθερες παραμέτρους. Όμως, για λόγους καλύτερης απόδοσης της διαδικασίας ελαχιστικοποίησης, το MINUIT καλείται για τροχιές που έχουν δώσει τουλάχιστον τέσσερα χτυπήματα στους ανιχνευτές.

Το πρόγραμμα ελαχιστικοποίησης εξάγει τις τιμές των παραμέτρων r_0 και φ_0 καθώς και τα σφάλματα αυτών. Ο κώδικας ολοκληρώνεται με την αποθήκευση αυτών των τιμών.

² Η απόδειξη αυτής παρουσιάζεται στο Παράρτημα Γ.

Στο σχήμα 2 δίνεται η εικόνα των ανιχνευτών και, για 10 τροχιές, τα πραγματικά σημεία καθώς και τα «διαταραγμένα».

Δ. Ανάλυση.

Δ1. Προσδιορισμός της διακριτικής ικανότητας των ανιχνευτών.

Το πρώτο βήμα είναι να προσδιορίσουμε τη διακριτική ικανότητα του ανιχνευτή μας.

Γνωρίζουμε ότι οι κατανομές των «διαταραγμένων» σημείων που δίνουν οι ανιχνευτές μας είναι Γκαουσιανές, κεντραρισμένες στο μηδέν ($\mu=0$) και με $\sigma_0=0.01$, το οποίο ζητάμε να προσδιορίσουμε.

Η κατανομή αυτή θα έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας την:

$$P(x) = \frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma_0^2}} \quad (3)$$

Εάν τώρα κάνω την αλλαγή μεταβλητών :

$$\xi = \frac{x - \mu}{\sigma} \quad (4)$$

η νέα συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας θα είναι:

$$L(\xi) = \frac{1}{\frac{\sigma_0}{\sigma} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{2\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}}} \quad (5)$$

Αυτή η νέα γκαουσιανή κατανομή είναι κεντραρισμένη στο μηδέν ($\mu=0$), ενώ το σίγμα της κατανομής είναι:

$$\Sigma = \frac{\sigma_0}{\sigma} \quad (6)$$

Για να προσδιορίσω το σ_0 , από την σχέση (6) προκύπτει ότι, όταν $\sigma = \sigma_0$, τότε $\Sigma=1$. Συνεπώς, αναζητώ την κατανομή της ποσότητας $\xi = \frac{x - \mu}{\sigma}$ η οποία θα μου δώσει $\Sigma=1$.

Έτσι λοιπόν, για μια σταθερή τιμή της ορμής ($p=50$) μεταβάλλω την τιμή του erroirhi στον υπολογισμό του χ^2 και δημιουργώ τα ιστογραμμάτα της

ποσότητας $\frac{p_o - p_{rec}}{\sigma_{rec}}$, όπου p_o είναι η πραγματική τιμή της ορμής του σωματιδίου, p_{rec} είναι η ανακατασκευασμένη ορμή, έτσι όπως υπολογίζεται από το πρόγραμμα ελαχιστοποίησης MINUIT και σ_{rec} είναι το σφάλμα της τιμής του p_{rec} .

Με τιμές για το $errorphi$ 0.001, 0.005, 0.05, 0.2 και 0.5 παίρνουμε τα ιστογράμματα μαζί με τις γκαουσιανές προσαρμογές που παρουσιάζονται στο σχήμα 3.

Στο σχήμα 4 φαίνεται η μεταβολή του Σ της γκαουσιανής προσαρμογής σαν συνάρτηση της μεταβαλλόμενης τιμής στο $errorphi$.³

Παρατηρούμε τη λογαριθμική σχέση αυτών των δύο ποσοτήτων: όσο αυξάνει η τιμή του $errorphi$ μειώνεται εκθετικά η τιμή του Σ της γκαουσιανής.

Από το ίδιο διάγραμμα παρουσιάζεται και το σημείο για το οποίο $\Sigma=1$ (κόκκινη ένδειξη). Αυτό το σημείο αντιστοιχεί στην τιμή $errorphi=0.01$, η οποία και αποτελεί τη διακριτική ικανότητα του ανιχνευτή μας, έτσι όπως καθορίστηκε στο πρόγραμμα.

Με αυτόν τον τρόπο, κατορθώσαμε να προσδιορίσουμε τη διακριτική ικανότητα των ανιχνευτών. Για την ίδια τιμή του p , και για $errorphi=0.01$ σχεδιάζουμε τα p_{ul} ιστογράμματα τόσο της ορμής όσο και της γωνίας εκτόξευσης. Αυτά παρουσιάζονται στο σχήμα 5. Παρατηρούμε ότι τόσο το κεντράρισμα της κατανομής, όσο και το σίγμα είναι πολύ κοντά στις αναμενόμενες τιμές στην περίπτωση της γωνίας, ενώ για την περίπτωση της ορμής οι τιμές παρουσιάζουν απόκλιση.

4.2. Εξάρτηση της ακρίβειας ανακατασκευής των τροχιών συναρτήσει της ορμής

Το επόμενο βήμα είναι να δούμε πώς μεταβάλλεται η ικανότητα των δεδομένων ανιχνευτών μας, με διακριτική ικανότητα $\sigma=0.01$, στην ανακατασκευή τροχιών διαφορετικών ορμών.

Για το λόγο αυτόν, μεταβάλλουμε την αρχική ορμή των σωματιδίων με τιμές 10, 20, 50, 100, 200, 500. Το σχήμα 6 δείχνει τα p_{ul} ιστογράμματα της ορμής ($\Delta p/\sigma$), ενώ στο σχήμα 7 φαίνονται τα αντίστοιχα estimation ιστογράμματα ($\Delta p/p$). Το σχήμα 8 παρουσιάζει τη μεταβολή του σίγμα της

³ Τα σφάλματα στις τιμές του gaussian sigma (Σ) έχουν ληφθεί υπόψιν κατά το σχεδιασμό της γραφικής παράστασης, αλλά είναι πολύ μικρά και δεν αναπαρίσταντε στο συγκεκριμένο διάγραμμα.

γκαουσιανής κατανομής ως συνάρτηση της ορμής⁴, για τα estimation ιστογράμματα.

Από τα estimation ιστογράμματα παρατηρούμε ότι όσο μεγαλώνει η ορμή του σωματιδίου, η κατανομές αποκλίνουν από την γκαουσιανή (για το λόγο αυτό, η γκαουσιανή προσρμογή δεν έχει νόημα στα τρία τελευταία ιστογράμματα, όπου οι κατανομές δεν είναι συμμετρικές).

Η ικανότητα ανακατασκευής της ορμής μειώνεται, θα μπορούσαμε να πούμε για τιμές $p \geq 100$. Και αυτό είναι αναμενόμενο, αφού η διαδέσιμη διακριτική ικανότητα των ανιχνευτών μας ($\sigma = 0.01$) δεν είναι σε θέση να διαχωρίσει τροχιές μεγάλων ορμών, δηλαδή πολύ μικρής καμπυλότητας.

Για αναμετωπίσουμε το πρόβλημα της διακριτικής μας ικανότητας σε περιοχές ορμών, όπου η υπάρχουσα διάταξη αδυνατεί, μπορούμε να εφαρμόσουμε τρία πράγματα:

- **Να αυξήσουμε την ένταση του μαγνητικού πεδίου.** Κατ' αυτόν τον τρόπο, όπως είναι και φανερό από την εξίσωση ($\gamma 3$) του παραρτήματος Γ, μειώνεται η ακτίνα καμπυλότητας, οπότε τροχιές που είχαν μικρή καμπύλωση, τώρα την αυξάνουν.
- **Να αυξήσουμε την «ποιότητα» των ανιχνευτών.** Με τη βελτίωση της διακριτικής ικανότητας των ανιχνευτών μας, ως προς τις μεταβολές της γωνίας φ , προσδιορίζουμε με μεγαλύτερη ακρίβεια τις τροχιές μεγαλύτερης ορμής.
- **Να αυξήσουμε την απόσταση των ανιχνευτών.** Με αυτόν τον τρόπο μεγαλώνουμε το lever arm της διάταξής μας.

Ας μελετήσουμε αναλυτικά την επίδραση των παραπάνω παραμέτρων στην ανακατασκευή τροχιών με ορμή $p=200$, η οποία, όπως φαίνεται και από το σχήμα 7, δεν μπορεί να ανακατασκευαστεί με ακρίβεια.

Δ3. Εξάρτηση της ακρίβειας ανακατασκευής των τροχιών συναρτήσει του μαγνητικού πεδίου.

Στη συγκεκριμένη περίπτωση μελετούμε την ικανότητά μας στην ανακατασκευή των τροχιών με διακριτική ικανότητα του ανιχνευτή μας $\sigma=0.01$, απόσταση ανιχνευτών $R_{av}=1$ και μαγνητικό πεδίο $B = 1, 5, 10, 15, 20,$ και 50 . Στο σχήμα 9 παρουσιάζονται τα estimation ιστογράμματα, ενώ στο σχήμα 10 φαίνεται η μεταβολή του σίγμα της γκαουσιανής κατανομής συναρτήσει του μαγνητικού πεδίου. Είναι φανερό η βελτίωση του σίγμα για μεγάλες τιμές του μαγνητικού πεδίου, όπως άλλωστε αναμενόταν.

⁴ Για τις τρεις τελευταίες περιπτώσεις, χρησιμοποιείται η RMS τιμή και όχι το σίγμα της γκαουσιανής κατανομής

Δ4. Εξάρτηση της ακρίβειας ανακατασκευής των τροχιών συναρτήσει της διακριτικής ικανότητας των ανιχνευτών.

Για σταθερή ένταση του μαγνητικού πεδίου $B=1$ και σταθερή απόσταση των ανιχνευτικών μας διατάξεων, μεταβάλλουμε τη διακριτική ικανότητα των ανιχνευτών στις τιμές $\sigma=0.01, 0.008, 0.005, 0.001, 0.0005, 0.0001$. Τα estimation ιστογράμματα φαίνονται στο σχήμα 11, ενώ το σχήμα 12 δείχνει ακριβώς τη μεταβολή της ακρίβειας στην ανακατασκευή των τροχιών ως συνάρτηση της διακριτικής ικανότητας του ανιχνευτικού συστήματος. Εάν κρίνουμε μόνο από τις δύο τελευταίες τιμές, μπορούμε να πούμε ότι η ικανότητά μας στην ανακατασκευή των τροχιών μεγαλώνει γραμμικά για $\sigma_{ανιχ}<0.005$, ενώ για $\sigma_{ανιχ}>0.005$ παραμένει σχεδόν ανεξάρτητη. Βέβαια, για να τεκμηριώσουμε την σκέψη αυτή θα έπρεπε να δούμε τα αποτελέσματα για $\sigma_{ανιχ}>0.01$.

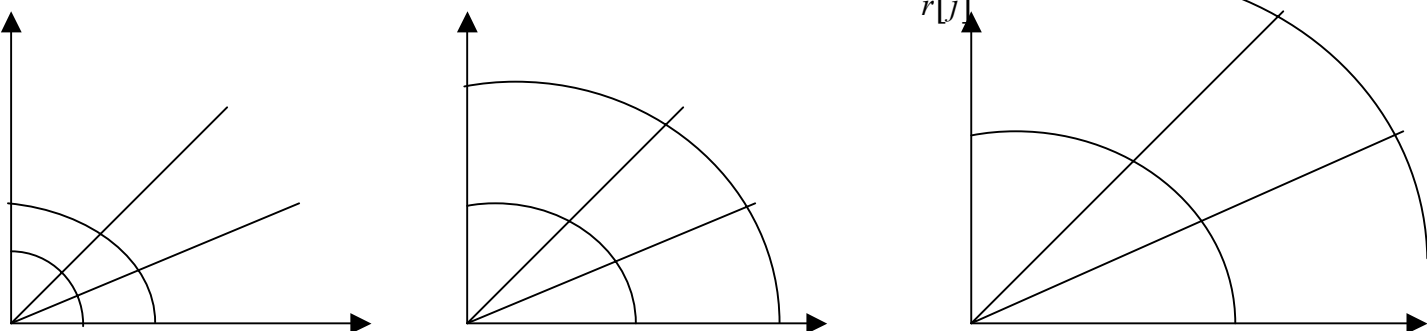
Δ5. Εξάρτηση της ακρίβειας ανακατασκευής των τροχιών συναρτήσει της απόστασης των ανιχνευτών.

Τέλος, μεταβάλλουμε την απόσταση των ισαπέχοντων ανιχνευτών μας σε τιμές $\Delta R=1, 5, 10, 15, 20, 25$ διατηρώντας $B=1$ και $\sigma=0.01$. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στα σχήματα 13 και 14.

Αξίζει να σημειώσουμε στο σημείο αυτό ότι, κατά τη μελέτη της συγκεκριμένης παραμέτρου (της απόστασης μεταξύ των ανιχνευτών), οφείλει κανείς να δώσει ιδιαίτερη προσοχή στον τρόπο που θα εισάγει το σφάλμα στη γωνία φ , ώστε να βρει τα διαταραγμένα σημεία.

Η βασική σκέψη είναι ότι θέλει κανείς να διατηρεί το ίδιο σφάλμα στη μετατόπιση κατά φ και στους 10 ανιχνευτές, αφού τους θεωρούμε ισοδύναμους ως προς τη διακριτική τους ικανότητα. Θέλουμε δηλαδή να έχουμε σταθερό μήκος τόξου. Συνεπώς κατά τη μεταβολή της ακτίνας των δέκα ανιχνευτών σε διάφορες αποστάσεις μεταξύ τους, μεταβάλλεται το μήκος του τόξου (σχήμα 15) και άρα θα πρέπει να διαιρέσουμε το γκαουσιανό σφάλμα στη γωνία με την αντίστοιχη ακτίνα του ανιχνευτή, ώστε τα «διαταραγμένα» κατά φ νέα σημεία να αντιστοιχούν σε ίδια διακριτική ικανότητα, σε όλους τους ανιχνευτές. Αυτό σημαίνει ότι στον κώδικα μας, λάβαμε υπόψιν την εξής γραμμή:

$$\text{phi_real}[j] = \text{phi}[j] + \frac{\text{error}}{r[j]}$$

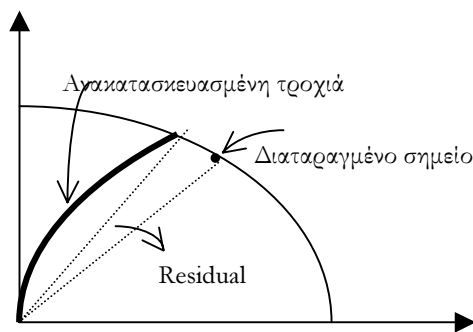


Σχήμα 15: Μεταβολή του τόξου που αντιστοιχεί σε ίδια επίκεντρη γωνία όσο μεγαλώνει η απόσταση των τεταρτοκυκλίων.

Αυτό που διαπιστώνουμε είναι η αύξηση του lever arm του συστήματος των ανιχνευτών, οδηγεί σε καλύτερη ικανότητα προσδιορισμού της τροχιάς. Μάλιστα είναι φανερό η γραμμικότητα των δύο παραμέτρων.

4.6. Υπόλοιπα (Residuals).

Ορίζουμε γενικά ως **υπόλοιπο** (στο εξής: residual) τη διαφορά μεταξύ του πραγματικού-πειραματικού δεδομένου και του ανακατασκευασμένου. Στην περίπτωση μας αυτό οδηγεί στη διαφορά γωνίας μεταξύ του σημείου που χρησιμοποιήθηκε για να βρεθεί η προσαρμοσμένη τροχιά και του προσαρμοσμένου σημείου για ένα συγκεκριμένο επίπεδο ανιχνευτή. Αυτό φαίνεται στο σχήμα 16.



Σχήμα 16: Ορισμός του residual

Σύμφωνα με τα παραπάνω κατασκευάζουμε τα ιστογράμματα των residuals για το πρώτο και το πέμπτο επίπεδο ανιχνευτών. Τα ιστογράμματα παρουσιάζονται στα σχήματα 17a και 17b.

Όπως προκύπτει και από τα δύο αυτά ιστογράμματα, οι τιμές των σίγμα των γκαουσιανών κατανομών δεν συμπίπτουν με τη διακριτική ικανότητα των ανιχνευτών μας (δηλαδή 0.01). Στην περίπτωση του πρώτου επιπέδου η κατανομή δίνει $\sigma=0.008$ ενώ για το πέμπτο επίπεδο είναι $\sigma=0.009$.

Ο λόγος είναι ότι για τον υπολογισμό των residuals σε κάθε επίπεδο, ελήφθη υπόψιν και το σημείο του επιπέδου που χρησιμοποιήθηκε για τον προσδιορισμό την ανακατασκευασμένης τροχιάς. Υπό αυτήν την έννοια, το σημείο αυτό και το σημείο τομής της ανακατασκευασμένης τροχιάς με το υπό εξέταση επίπεδο **δεν είναι ανεξάρτητα**: μικρή μετατόπιση του σημείου που δίνει ο ανιχνευτής, θα έχει ως αποτέλεσμα την μεταβολή της ανακατασκευασμένης τροχιάς, αφού θα αλλάξει η τιμή του χ^2 .

Για να επιβεβαιώσουμε το παραπάνω, για το πρώτο επίπεδο, υπολογίζουμε την ανακατασκευασμένη τροχιά **χωρίς να λαμβάνουμε υπόψιν** τη συνεισφορά του πρώτου επιπέδου. Στη συνέχεια υπολογίζουμε τα residuals του

πρώτου επιπέδου, όπου τώρα τα δύο σημεία είναι τελείως ανεξάρτητα. Το αποτέλεσμα φαίνεται στο σχήμα 18. Ανάλογα θα μπορούσαμε να δουλέψουμε για τα υπόλοιπα επίπεδα.

Ε. Συμπεράσματα–Επεικτάσεις.

Γενικά, θα μπορούσαμε να πούμε ότι μελετήθηκε μια απλοποιημένη έκδοση του προβλήματος της εύρεσης της τροχιάς σωματιδίων. Παρ'όλα αυτά, η ανάλυση που έγινε μπορεί να γενικεύει και σε περισσότερο πολύπλοκα προβλήματα.

Στο συγκεκριμένο πρόβλημα δεν ασχοληθήκαμε με την αναγνώριση των τροχιών (Pattern Recognition), δηλαδή να αναπτύξουμε μεθόδους για να αναγνωρίσουμε ποιά χτυπήματα (hits) των ανιχνευτών ανήκουν στην ίδια τροχιά, δηλαδή δώθηκαν από το ίδιο σωματίδιο. Αυτό απαιτεί ανώτερης τάξης μεθοδολογία με βασικά εργαλεία τον αντικειμενοστρεφή προγραμματισμό, στις σύγχρονες εξελίξεις, (Object Oriented Programming), το MST (Minimum Spanning Tree) και επιμέρους θέματα υπολογιστικής φυσικής (π.χ παραμετροποίηση, παρεμβολή κτλ).

Επιπλέον, θεωρήσαμε ότι οι ανιχνευτές μας είναι οι ίδιοι και με την ίδια διακριτική ικανότητα. Αυτό όμως δεν συμβαίνει στην πραγματικότητα. Τότε κανείς οφείλει να λάβει υπόψιν του τον ιδιαίτερο τύπο ανιχνευτή (πολυσυρματικοί αναλογικοί θάλαμοι, ανιχνευτές ημιαγωγών, θάλαμοι ιονισμού κτλ) που χρησιμοποιεί. Αυτό σημαίνει ότι θα πρέπει να έχει κατά νου τις ιδιαίτερες διαδικασίες που συμβαίνουν κατά την αλληλεπίδραση του σωματιδίου με τον ανιχνευτή του στις διάφορες περιοχές ορμών και ενεργειών του σωματιδίου. Μεταξύ των άλλων, οι πιο βασικές αλληλεπιδράσεις είναι οι πολλαπλές σκεδάσεις και η απώλεια ενέργειας λόγω H/M αλληλεπιδράσεων. Η πρώτη θα έχει ως αποτέλεσμα την μεταβολή τόσο της ορμής, όσο και της διεύθυνσης κίνησης του σωματιδίου. Η απώλεια ενέργειας συνεπάγεται την μεταβολή της ορμής του σωματιδίου κατά τη διεύλωσή του μέσα από τον ανιχνευτή (βλ. J.D.Jackson κεφ. 13). Λόγω της στοχαστικής φύσης των διεργασιών αυτών θα πρέπει να δουλεύουμε συνεχώς με στατιστικά μεγέθη και διακυμάνσεις. Εάν λοιπόν θέλαμε να συμπεριλάβουμε και αυτές τις παραμέτρους στον κώδικα μας, θα έπρεπε σε κάθε ανιχνευτή να προσθέτουμε και κατάλληλες κατανομές που αντιπροσωπεύουν τις αντίστοιχες φυσικές διεργασίες που λαμβάνουν χώρα με το υλικό του ανιχνευτή. Τότε θα άλλαζε σε κάθε στάδιο η ορμή, η ενέργεια του σωματιδίου και πιθανόν η θέση του, ακολουθώντας την αντίστοιχη κατανομή (με το κατάλληλο στατιστικό βάρος και σφάλμα). Αξίζει να αναφέρουμε ότι είναι απαραίτητη και η γνώση της διακριτικής ικανότητας του κάθε ανιχνευτή, η οποία τις περισσότερες φορές αποτελεί κατασκευαστική παράμετρο.

Βασικός παράγοντας είναι το μαγνητικό πεδίο, το οποίο προκαλεί την επίδραση στη διαγραφόμενη τροχιά. Στη συγκεκριμένη εφαρμογή θεωρήσαμε κάθετο, ομογενές μαγνητικό πεδίο. Στις περισσότερες όμως των περιπτώσεων, το εφαρμοζόμενο πεδίο

είναι ανομοιογενές, τόσο κατά την διεύθυνση, όσο και κατά το μέτρο. Είναι λοιπόν χρήσιμη σε κάθε πειραματική διάταξη η **χαρτογράφηση**⁵ του μαγνητικού πεδίου, δηλαδή τη τιμή του σε κάθε σημείο ή διεύθυνση, δημιουργώντας κατ' αυτόν τον τρόπο μια βάση δεδομένων του μαγνητικού πεδίου. Τα πράγματα γίνονται πιο εύκολα στην περίπτωση ύπαρξης επιπέδων συμμετρίας.

Στην περίπτωση που έχουμε διαφορές του μαγνητικού πεδίου από τις ιδανικές συνθήκες, αυτές μπορούν να ανιχνευτούν χρησιμοποιώντας τη γνωστή μάζα του σωματιδίου (εάν μεν η μάζα του σωματιδίου δεν είναι γνωστή, με μέτρηση π.χ του dE/dx μπορούμε να την προσδιορίσουμε). Η μεθοδολογία αυτή συνίσταται στον έμμεσο προσδιορισμό της μάζας του σωματιδίου από την τιμή του μαγνητικού πεδίου και της ανακατασκευασμένης ορμής. Εάν υπάρχει απόκλιση τότε το μαγνητικό πεδίο δεν έχει την τιμή που εμείς θεωρήσαμε. Επίσης, μπορούμε να βρούμε τα σφάλματα στη γνώση του μαγνητικού πεδίου από τα ιστογράμματα των υπολοίπων, για κάθε επίπεδο. Από τα residuals επίσης είναι δυνατόν να προσδιορίσουμε και τυχόν σφάλματα που υπάρχουν στην ευθυγράμμιση (alignment) των ανιχνευτών μας. Είναι φανερό πως στην πρώτη περίπτωση, που έχουμε μικρές μεταβολές στις τιμές του μαγνητικού πεδίου, θα έχουμε επίδραση σ'όλην την τροχιά του σωματιδίου, σ'αντίθεση με τη δεύτερη περίπτωση, όπου τυχόν σφάλματα στην ευθυγράμμιση-τοποθέτηση των ανιχνευτών επηρεάζουν μόνο τοπικά την τροχιά και μάλιστα προσθέτουν ένα offset στη μέτρηση των χωρικών συντεταγμένων, χωρίς όμως να επηρεάζουν τη φυσική κίνηση των σωματιδίων. Έτσι θα γνωρίζουμε τις κατάλληλες μεταβολές που πρέπει να γίνουν στις διάφορες παραμέτρους (μαγνητικό πεδίο, μετατόπιση ανιχνευτών), ώστε να πετύχουμε τις επιθυμητές συνθήκες.

Τέλος, αξίζει να αναφερθούμε και στο οικονομικό κόστος που οφείλει κανείς να παίρνει υπόψιν κατά την κατασκευή των ανιχνευτών και της όλης διάταξης. Θα πρέπει λοιπόν να αντισταθμίσει το χρηματικό κόστος από τη μια, με την επιδιωκόμενη ακρίβεια και ποιότητα από την άλλη.

⁵ Η χαρτογράφηση πετυχαίνεται με την επίλυση των εξισώσεων Maxwell για όλο το χώρο του ανιχνευτή, γνωρίζοντας τα ρεύματα (γεωμετρία και τιμές) που χρησιμοποιούνται.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

- A. Κώδικας προγράμματος.
- B. Γεννήτορας Τυχαίων Αριθμών.
- Γ. Αναλυτικός υπολογισμός μαθηματικών εξισώσεων.

Α : Ο κώδικας του προγράμματος

```
gROOT -> Reset();

// GLOBAL_DECLARATIONS

const Double_t kMass = 1;
const Double_t kCharge = 1;
const Double_t kBeta = 1;
const Double_t kPi = 3.14159265;

Int_t seed = 933943;

Int_t i, j, Total_tracks=0, lost_tracks, saved_tracks=0, CALLIM_lost_hits, hit_number;

Float_t phi_rand, p_rand, phi_init, p_init, ro, m, yo, xo, mi, gamma;

Double_t ro_fitted=0, error_ro_fitted=0, phi_fitted=0, error_phi_fitted=0;

FILE *fp;

Float_t r[10], r_real[10], phi_real[10], x_real[10], y_real[10], x[10], y[10], phi[10],
errorphi[10];

Double_t par[2];

Double_t func(float r, Double_t *par);
void fcn(Int_t &npar, Double_t *gin, Double_t &f, Double_t *par, Int_t iflag);

// The errors on phi values

Float_t error = 0.01;

errorphi[0]=error;
errorphi[1]=error;
errorphi[2]=error;
errorphi[3]=error;
errorphi[4]=error;
errorphi[5]=error;
errorphi[6]=error;
errorphi[7]=error;
errorphi[8]=error;
errorphi[9]=error;

// FUNCTIONS NEEDED FOR THE MINUIT
```

```

Double_t func(float r,Double_t *par) //function prototype for the fitting
{

    Double_t value=par[1]+TMath::ACos(r/(2*par[0]));
    return value;

} //end of the function prototype

void fcn(Int_t &npar, Double_t *gin, Double_t &f, Double_t *par, Int_t iflag)
{

//calculate chisquare
Int_t k;
Int_t nbins = hit_number ;

Double_t chisq = 0;
Double_t delta;

for (k=0;k<nbins; k++) {
    delta = (phi_real[k]-func(r[k],par))/errorphi[k];
    chisq += delta*delta;
}

f = chisq;

} //end of the fcn

void Pattern_Reco(void)
{

    fp=fopen("XXXXXX.dat","w");

//*****DISLPAY FORM*****//

TCanvas *c1 = new TCanvas("c1", "Detectors' signals for Pattern Recognition and
                                Reconstruction",0,0,800,800);

c1->Range(0,0,15,15);
c1->SetBorderSize(2);

TGaxis *axis1 = new TGaxis(0,0,10,0,0,10,510,"");
axis1->SetLabelSize(0.02);
axis1->Draw();

TGaxis *axis2 = new TGaxis(0,0,0,10,0,10,510,"");
axis2->SetLabelSize(0.02);

```

```

axis2->Draw();

for (i=1; i<=10; i++){

    TArc *arc=new TArc(0.0,0.0,i,0.0,90.0);
    arc->Draw();
    arc->SetLineColor(i);
    if (i==10) arc->SetLineColor(1);

}

// RANDOM NUMBER GENERATION

TRandom *random_number=new TRandom(seed);

// CALCULATIONS

while (saved_tracks<1000) {

    hit_number=0;

    phi_rand=random_number->Uniform(1);
    p_rand=random_number->Uniform(1);

    phi_init=((phi_rand*90)*kPi)/(180.0); // phi in rads
    p_init=200;

    ro=p_init/(kCharge*kBeta); //the radius of curvature

    m=tan(phi_init); //the slope at the origin

    yo=-ro/(sqrt(1+m*m)); //the yo coordinate of the curvature circle
    xo=-m*yo; //the xo coordinate of the curvature circle

    for (j=0; j<10; j++) { //loop for each detector

        r[j]=j+1; //the radius of each of the 10 detectors

        mi=(r[j]*r[j]+xo*xo+yo*yo-ro*ro)/(2*xo); //a variable
        gamma=4*(r[j]*r[j]/(m*m)-mi*mi+r[j]*r[j]); //another variable

        x[j]=(m*(sqrt(gamma)+2*m*mi))/(2*(1+m*m)); //the x cross-point
        y[j]=(m*(m*sqrt(gamma)-2*mi))/(2*(1+m*m)); //the y cross-point

        phi[j]=TMath::ATan(y[j]/x[j]); //the phi angle of point j
    }
}

```

```

if (y[i][j]>=0) { //mark only the positive y points

    TMarker *marker1 = new TMarker(x[i][j],y[i][j],2);
    marker1->SetMarkerStyle(2);
    marker1->SetMarkerSize(1.3);
    marker1->Draw();
}

error=random_number->Gaus(0,0.01); //The resolution of the detectors

//calculate the new points....

    //...in polar coordinates

    phi_real[j]=phi[j]+error/r[j];
    r_real[j]=r[j];

    //...in cartesian coordinates

    x_real[j]=r_real[j]*TMath::Cos(phi_real[j]);
    y_real[j]=r_real[j]*TMath::Sin(phi_real[j]);

    if (y_real[j]>=0) { //count how many hits i have

        hit_number=hit_number+1;

    }

} //end of the loop for each detector

if (hit_number<=4) lost_tracks=lost_tracks+1;

if (hit_number>4) {

//GO FOR THE FITTING OF THE IDEAL POINTS

TMinuit *gMinuit = new TMinuit(2); //initialize TMinuit with a maximum of 3 parameters
gMinuit->SetFCN(fcn);

Double_t arglist[10];
Int_t ierflg = 0;
arglist[0] = 1.0;

gMinuit->mnexcm("SET ERR", arglist,1,ierflg);

```



```

arglist[0]=-1;
gMinuit->mnexcm("SET PRI",arglist,1,ierflg);

// Set starting values and step sizes for parameters

Double_t vstart[2] = {ro,TMath::Tan(yo/xo)};
Double_t step[2] = {0.1,0.1};
gMinuit->mnparm(0, "r", vstart[0], step[0], 0,0,ierflg);
gMinuit->mnparm(1, "phi", vstart[1], step[1], 0,0,ierflg);

// Now ready for minimization step
arglist[0]=500;
arglist[1] = 0.1;
gMinuit->mnexcm("MIGRAD", arglist ,2,ierflg);

// Print results
Double_t amin,edm,errdef;
Int_t npar,nparx,icstat;

gMinuit->mnstat(amin,edm,errdef,npar,nparx,icstat);

//Get the values and the errors of the parameters

gMinuit->GetParameter(0,ro_fitted,error_ro_fitted);
gMinuit->GetParameter(1,phi_fitted,error_phi_fitted);

gMinuit->mnstat(amin, edm, errdef, npar, nparx, icstat);

char *status=(char *)gMinuit->fCstatu.Data(); //Get the Status

//end of the fit

//Calculate the fitted parameters and their errors

Double_t p_fitted=ro_fitted*kCharge*kBeta;
Double_t error_p_fitted=error_ro_fitted*kCharge*kBeta;
Double_t phi_fitted=0.5*kPi-TMath::Abs(phi_fitted);

char *Conv="CONVERGED ";
char *Limit="CALL LIMIT";

if ( ( strcmp(status,Conv) == 0) && ( abs(p_fitted)<500) ) {

fprintf(fp,"%d\t%f\t%f\t%f\t%f\t%f\t%f\n",saved_tracks,p_init,phi_init,p_fitted,phi_fitted,error_
p_fitted,error_phi_fitted);
saved_tracks=saved_tracks+1;

```

```

}

else {

    CALLIM_lost_hits=CALLIM_lost_hits+1;
}

} // End the if (hit_number>=4) statement

// Initialize the initial values

p_init=0.0;
phi_init=0.0;

Total_tracks=Total_tracks+1;

delete gMinuit;

} //End of the loop over all the tracks.

fclose(fp);

cout<<"TOTAL TRACKS-----> "<<Total_tracks<<endl;
cout<<"Lost Tracks because number of hits less/equal to three -----> "<<lost_tracks<<endl;
cout<<"Lost tracks(MIGRAD didn't Converged)-----> "<<CALLIM_lost_hits<<endl;
cout<<"Saved tracks -----> "<<saved_tracks<<endl;

} //end of the Pattern_Reco.c

```

B. Γεννήτορας Τυχαίων αριθμών.

Γενικά, μπορούμε να πούμε ότι ένας καλός γεννήτορας τυχαίων αριθμών, μεταξύ των άλλων, οφείλει να έχει καλές στατιστικές ιδιότητες, να έχει μεγάλη περίοδο και να είναι ανεξάρτητος από το μηχάνημα.

Ο γεννήτορας των τυχαίων αριθμών (RNG) που χρησιμοποιήθηκε είναι από την κλάση TRandom της ROOT. Έχει περιοδικότητα 10^8 (αριετά μεγαλύτερη από τους περίπου 1.500 αριθμούς που κάθε φορά παρήγαμε) και δίνει είτε γκαουσιανή κατανομή είτε ομοιόμορφη κατανομή αριθμών μεταβλητής υποδιαστολής στο διάστημα (0,1]. Είναι ανεξάρτητος από την μηχανή που χρησιμοποιείται και δίνει ακριβώς την ίδια σειρά αριθμών για όλες τις μηχανές μεγαλύτερες των 32 bits. Είναι παγιόσμια έκδοση από το F. James, 1985.

Το σχήμα B1 παρουσιάζει μερικούς από τους ελέγχους που μπορούν να γίνουν.

Το πρώτο ιστόγραμμα παρουσιάζει την τυχαία, ομοιόμορφη κατανομή αριθμών στο διάστημα (0,1]. Βλέπουμε ότι η μέση τιμή είναι ~ 0.5 , όπως άλλωστε αναμενόταν.

Στο δεύτερο παρουσιάζεται η παραγωγή τυχαίων αριθμών που ακολουθούν τη γκαουσιανή κατανομή κεντραρισμένη στο μηδέν και με $\sigma=1$.

Τέλος, στο τρίτο διάγραμμα φαίνεται η συσχέτιση μεταξύ ενός τυχαίου αριθμού που παράγεται ομοιόμορφα με τον επόμενο του. Είναι φανερό ότι δεν υπάρχει καμιά δομή (structure) μεταξύ τους.

Γ. Απόδειξη μαθηματικών εξισώσεων

Όπως είναι γνωστό, κατά την κίνηση φορτίου μέσα σε (ομογενές) μαγνητικό πεδίο έντασης B , ασκείται σ'αυτό η δύναμη Lorentz. Εάν υποθέσουμε ότι δεν υπάρχει μαγνητικό πεδίο και ότι θεωρούμε αμελητέα τα φαινόμενα που προκαλούν τα υλικά και η ακτινοβολία πέδησης, η δύναμη αυτή είναι:

$$\mathbf{F} = q \cdot \mathbf{u} \times \mathbf{B} \quad (\gamma 1)$$

όπου u είναι η ταχύτητα του σωματιδίου και q είναι το φορτίο του. Για ομογενές μαγνητικό πεδίο, η κίνηση του σωματιδίου θα είναι κυκλική, οπότε η δύναμη Lorentz θα είναι η κεντρομόλος δύναμη:

$$F = \frac{mu^2}{R_o} \quad (\gamma 2)$$

όπου R_o είναι η ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς και m η μάζα του σωματιδίου. Από τις $(\gamma 1)$ και $(\gamma 2)$, και για μαγνητικό πεδίο κάθετο στην κίνηση, προκύπτει ότι:

$$R_o = \frac{mu}{qB} \quad (\gamma 3)$$

με:

$$p = mu \quad (\gamma 4)$$

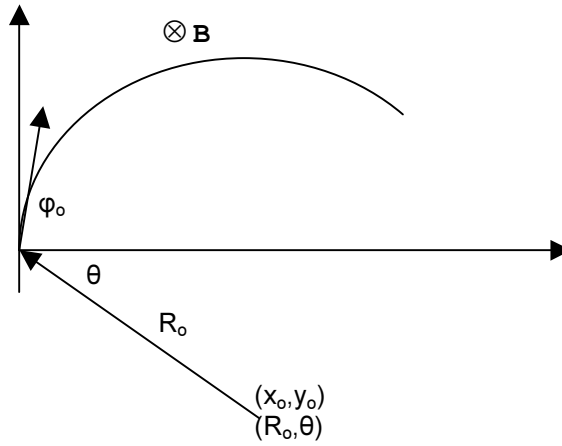
να είναι η κλασσική ορμή του σωματιδίου.

Η εξίσωση κίνησης του σωματιδίου, στο σύστημα συντεταγμένων που φαίνεται στο σχήμα $\Gamma 1$, θα είναι:

$$(x - x_o)^2 - (y - y_o)^2 = R_o^2 \quad (\gamma 5)$$

όπου x_o, y_o είναι οι καρτεσιανές συντεταγμένες του κέντρου της κυκλικής τροχιάς. Στο σημείο $(0,0)$ η εφαπτόμενη της τροχιάς είναι :

$$\tan \phi = -\frac{x_o}{y_o} \quad (\gamma 6)$$



Σχήμα Γ1: Κίνηση σωματιδίου σε ομογενές μαγνητικό πεδίο. Σύστημα συντεταγμένων σε δύο διαστάσεις

Εάν θέσουμε:

$$m = \tan \phi \quad (\gamma 7)$$

τότε:

$$m = -\frac{x_0}{y_0} \quad (\gamma 8)$$

Αφού το σημείο $(0,0)$ ικανοποιεί την εξίσωση $(\gamma 5)$ του κύκλου, θα είναι:

$$x_0^2 + y_0^2 = R_0^2 \quad (\gamma 9)$$

Εάν λύσω το σύστημα των εξισώσεων $(\gamma 8)$ και $(\gamma 9)$, και σύμφωνα με το σχήμα Γ1, προκύπτουν οι καρτεσιανές συντεταγμένες του κέντρου του κύκλου:

$$\begin{cases} y_0 = -\frac{R_0}{\sqrt{1+m^2}} \\ x_0 = +\frac{mR_0}{\sqrt{1+m^2}} = -my_0 \end{cases} \quad (\gamma 10)$$

Τα σημεία τομής της κυκλικής τροχιάς με τους τεταρτοκύκλιους ανιχνευτές προκύπτουν από τη λύση του συστήματος των εξισώσεων $(\gamma 5)$ και

$$x^2 + y^2 = R_i^2 \quad (\gamma 11)$$

όπου R_i είναι η ακτίνα κάθε ανιχνευτή ($i=1,2,\dots,10$).

Η λύση του συστήματος δίνει:

$$\begin{cases} x = \frac{m(\sqrt{\Delta} + 2m\mu)}{2(1+m^2)} \\ y = \frac{m(m\sqrt{\Delta} - 2\mu)}{2(1+m^2)} \end{cases} \quad (\gamma 12)$$

όπου :

$$\begin{cases} \mu = \frac{R_i^2 + x_o^2 + y_o^2 - R_o^2}{2x_o} \\ \Delta = 4\left(\frac{R_i^2}{m^2} - \mu^2 + R_i^2\right) \end{cases} \quad (\gamma 13)$$

Εάν θελήσουμε να δουλέψουμε σε πολικές συντεταγμένες, τότε η εξίσωση (γ5) μετασχηματίζεται σύμφωνα με τις εξισώσεις:

$$\begin{cases} x = r \cos \phi \\ y = r \sin \phi \\ x_o = R_o \cos \theta \\ y_o = R_o \sin \theta \end{cases} \quad (\gamma 14)$$

όπου $(x,y)=(r,\phi)$ είναι οι καρτεσιανές και πολικές συντεταγμένες τυχαίου σημείου, και προκύπτει ότι:

$$\phi = \theta + \arccos\left(\frac{r}{2R_o}\right) \quad (\gamma 15)$$

Η ποσότητα αυτή χρησιμοποιήθηκε κατά την ελαχιστικοποίηση του χ^2